Doporučené príklady z lineárnej algebry

časť – <u>Diferenciálne rovnice</u>

I. Diferenciálne rovnice so separovateľnými premennými

1. $2y - x^3 y' = 0$
2. $y' - xy^2 - y^2 - xy - y = 0$
3. $(y-1)(y-2) - y' = 0$
4. $y - y^2 + xy' = 0$
5. $1 + y^2 + xy.y' = 0$
6. $y' = 1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{y^2+2} - \frac{1}{x(y^2+2)}$
7. $-y - a + (tg\, x).y' = 0, \quad \mathrm{a} = \text{konštanta}$
8. $\sin x.\cos y + y'\, tg\, y.\cos x = 0$
9. $(1+e^x).yy' = e^x$
10. $(x+1).y' + xy = 0, \quad y(0) = 1$
11. $\frac{x}{1+y} - \frac{yy'}{1+x} = 0, \quad y(0) = 1$
12. $y.\ln y + xy' = 0, \quad y(1) = 1$

II. Diferenciálne rovnice homogénne 1. rádu

1. Zistite stupeň homogénnej funkcie

a) $f(x,y) = \frac{2x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2}$

b) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$

c) $f(x,y) = \frac{x^3}{y} + y^2 \ln \frac{x}{y}$

d) $f(x,y) = xy \sin \frac{x+y}{x-y}$

2. Riešte diferenciálne rovnice

a) $xy' = x + y$
b) $(x+y).y' = 0$
c) $(x+y).y' - y = 0$
d) $x^2 y' = x^2 + xy + y^2$
e) $(x^2 - y^2).y' - 2xy = 0$

f) $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$

g) $xy' - y = xe^{\frac{y}{x}}$

h) $xy' = y \ln\left(\frac{x}{y}\right)$

i) $\left(y^2 - 3x^2\right).y' + 2xy = 0, \quad y(0) = 1$

j) $y' = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, \quad y(0) = 1$

k) $(xy' - y)\ arctg\left(\frac{y}{x}\right) = x, \quad y(1) = 0$

III. Lineárna diferenciálna rovnica 1. rádu. Bernouliho diferenciálna rovnica

1. $y' + 3y = x$
2. $y' + xy = x$
3. $xy' + y = x^3$
4. $y' + 2y = e^{2x}$
5. $x^2 y' + xy = -1$
6. $\left(1 + x^2\right)y' - 2xy = \left(1 + x^2\right)^2$
7. $y' - xy = xe^{x^2}$
8. $x(\ln x)y' - 2y = \ln x$
9. $y' + \dfrac{1}{x+1}.y = \sin x$
10. $y' \cos x + 2y.\sin x = 2 \sin x$
11. $y'\ tg\ x - y = \dfrac{1}{4}x(2\ tg\ x - x)$
12. $y' + x^2 y = x^2, \quad y(2) = 1$
13. $y' + y = \cos x, \quad y(0) = 1$
14. $y' + y \cot g\, x = \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
15. $y' + xy = xy^3$
16. $y' + \dfrac{xy}{1 - x^2} = x\sqrt{y}$
17. $y' + \dfrac{2y}{x} = -x^4 e^x y^3$
18. $y' + \dfrac{xy}{1 - x^2} = x\sqrt{y}$
19. $y' + \dfrac{y}{x} = ay^2 \ln x, \quad a =$ konštanta
20. $y' + y + y^2 \sin x = 0$

IV. Exaktná diferenciálna rovnica

1. $x+y+(x+2y)y'=0$
2. $1-\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{x}{y^2+x^2}y'=0$
3.
4.
5.

V. Diferenciálne rovnice vyšších rádov. Zníženie rádu diferenciálnych rovníc

1. $y'''\sin^4 x-\sin 2x=0$
2. $xy^{(4)}=1$
3. $y'''=\frac{1}{x^2},\quad y(1)=0,\ y'(1)=1,\ y''(1)=1$
4. $y''+y-1=0$
5. $y''-y'^3\ln y=0$
6. $y''\,tg\,y-(2y')^2=0$
7. $y''-y=0,\quad y(0)=1,\ y'(0)=0$
8. $xy''-y'=0$
9. $y''-\frac{y'}{x}=x^2,\quad x\neq 0$
10. $y''+y'\,tg\,x=\sin 2x$
11. $x^4y'''+2x^3y''-1=0$
12. $y'''=\frac{y''}{x},\quad x\neq 0$

VI. Lineárna diferenciálna rovnica s konštantnými koeficientmi

1. $y''-9y=0$
2. $2y''-6y'-y=0$
3. $y''+16y=0$
4. $y^{(4)}-5y''+4y=0$
5. $y^{(4)}-2y'''+y''=0$
6. $y''+6y'+9y=0$
7. $y^{(6)}-y^{(4)}=0$
8. $y^{(4)}+4y=0$

Riešte diferenciálnu rovnicu s pravou stranou, metódou neurčitých koeficientov:

9. $y'' - 7y' + 10 = f(x)$, ak $f(x)$ sa rovná :

a) 40

b) $20x^2 - 28x + 14$

c) $-12e^{3x}$

d) $-e^{2x}(6x+7)$

e) $65 \sin 2x$

f) $8e^{2x} \sin x$

10. $y'' + 4y = f(x)$, ak $f(x)$ sa rovná :

a) $x^4 - 2x$

b) $\cos 2x$

c) $\cos 3x$

d) e^{-2x}

11. $9y'' - 6y' + y = f(x)$, ak $f(x)$ sa rovná :

a) $\sqrt{2}$

b) $4e^{-\frac{x}{3}}$

c) $e^{\frac{x}{3}}$

d) $\sin\left(\frac{x}{3}\right)$

12. $y'' - y' - 1 = 0$

13. $y'' + y' - 6y = x + e^{2x}$

14. $y'' - 2y' + 2y = x^2 + \sin 2x$

15. $y''' - y = x^3 - 1$

16. $y^{(4)} + y''' = \cos 4x$

17. $y'' - y = \frac{1}{x}$

18. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

19. $y'' + y = \frac{1}{\sin x}$

20. $y'' - y = \frac{2e^x}{e^x - 1}$

21. $y'' + y = -\cot g^2 x$

22. $4y'' + y = 0$, $y'(\pi) = 3$, $y(\pi) = 2$

23. $y'' - y = 2x$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$

24. $y'' + y = \sin x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

25. $y'' - 5y' + 6y = x + e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

26. $y''' - y' = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$

časť- **Lineárna algebra**

1. Vypočítajte determinant

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 4 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 3 & -3 & -2 & -5 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

2. Vypočítajte inverznú maticu k danej matici

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -4 & -5 & 6 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3. Riešte maticové rovnice

a) $AX = B,\ kde \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $XA = B,\ kde \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

c) $AXB = C,\ kde \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $AX + B = CX,\ kde \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) $XA + C = XB,\ kde \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

f) $3A + AX = B,\ kde \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

g) $2AX + C = -BX,\ kde \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

4. Pomocou inverznej matice riešte systém rovníc

a) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x + y - 2z &= 0 \\ x + 2y - z &= 2 \\ 3x + 4y - 6z &= 1 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

5. Pomocou Cramerovho pravidla riešte systém rovníc

a) $$\begin{aligned} x - y + 2z &= 2 \\ 2x + y - z &= 1 \\ x + y - 2z &= 0 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x - y - 2z &= 1 \\ 2x + 2y - z &= -1 \\ 3x - 4y - 6z &= 1 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 &= 2 \end{aligned}$$

6. Gausovou eliminačnou metódou riešte

a) $$\begin{aligned} 2x - 2y - 2z - u &= 0 \\ 2x - 3y - 3z - 2u &= -1 \\ 3x - 4y - 3z - 2u &= 2 \\ x - 3y - 4z - 2u &= -3 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 7x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= -1 \\ 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 &= -1 \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 1 \\ 7x + 14y - 21z &= 7 \\ 5x + 10y - 15z &= 5 \\ 3x + 6y - 9z &= 3 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 &= 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 &= -2 \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 &= 6 \end{aligned}$$

časť- **Vektory**

1. Nech pre vektory $\vec{a}, \vec{b}$ platí : $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 5$, a uhol vektorov $\vec{a}, \vec{b}$ je $\frac{\pi}{3}$. *Vypočítajte* $(\vec{a} - 2\vec{b})^2$.

2. Zistite, či vektory $\vec{a} = (3,-3,1)$, $\vec{b} = (3,0,-9)$ sú navzájom kolmé.

3. Nech $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 6, \vec{a}.\vec{b} = -3$. Vypočítajte $|\vec{a} \text{ x } \vec{b}|$.

4. Zistite, či vektory $\vec{a} = (2,3,5)$ a $\vec{b} = (0,5,-2)$ sú kolineárne.

5. Trojuholník má vrcholy: $A = [1,-2,8]$, $B = [0,0,0]$, $C = [6,2,0]$. Vypočítajte jeho obsah.

6. Vypočítajte objem štvorstena s vrcholmi: $0 = [0,0,0], A = [5,2,0], B = [2,5,0], C = [1,2,4]$.

7. Zistite, či vrcholy $\vec{a} = 2i + 3j, \vec{b} = 3i - 2j, \vec{c} = 4j$ sú lineárne závislé.

8. Rozhodnite o lineárnej závislosti alebo lineárnej nezávislosti daných vektorov.
Po zistení lineárnej závislosti určite tú lineárnu kombináciu, ktorá sa rovná nulovému vektoru.

a)	$\vec{a} = [1,3,5], \vec{b} = [2,4,6]$	c)	$\vec{a} = [3,2,7], \vec{b} = [1,1,1], \vec{c} = [2,0,3]$
b)	$\vec{a} = [3,-8,1], \vec{b} = [-6,16,-2]$	d)	$\vec{a} = [3,2,0], \vec{b} = [1,1,1], \vec{c} = [5,4,2]$

9. V rovnobežníku ABCD je bod E stredom strany BC a bod F je stredom strany DC.
   Spojnice AF a AE pretínajú uhlopriečku BD po rade v bodoch M, N.
   Vypočítajte, akou časťou uhlopriečky BD je úsečka BN.

10. Zistite, či vektory $\vec{a} = [3,1,-2], \vec{b} = [1,1,2]$ sú navzájom kolmé.

11. Vektor $\vec{x}$ je kolmý na $\vec{a} = [6,3,0]$ a $\vec{b} = [1,7,2]$ vektor.
    Vypočítajte jeho súradnice ak: $\vec{x}.\vec{c} = 6$, kde $\vec{c} = [4,-4,-2]$

12. Vypočítajte uhol, ktorý zvierajú vektory $\vec{a} = [1,-5,0], \vec{b} = [3,-2,0]$.

13. V trojuholníku s vrcholmi $A = [1,2], B = [3,5], C = [1 + 3\sqrt{3}, 2 - 2\sqrt{3}]$ vypočítajte veľkosť jeho vnútorných uhlov.