1.6 Hydrodynamika ideálnej tekutiny

Eulerove rovnice hydrodynamiky

Eulerove rovnice hydrodynamiky vyjadrujú rovnováhu objemových, tlakových a zotrvačných síl v ideálnej prúdiacej kvapaline.

- vo vektorovom tvare

$$\mathbf{R} - \frac{1}{\rho}\, grad\, p = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{w}\, grad\, w. \qquad (1.113)$$

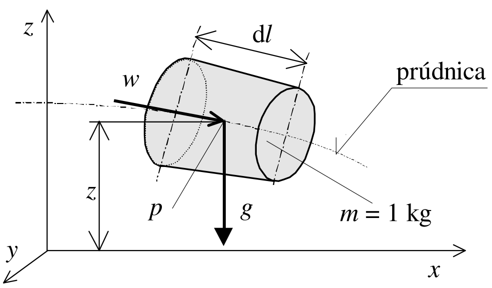
- v zložkovom tvare

$$\begin{aligned}
R_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{\partial w_x}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z}, \\
R_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial w_y}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_y}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_y}{\partial z}, \qquad (1.112) \\
R_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{\partial w_z}{\partial t} + w_x \frac{\partial w_z}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_z}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_z}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Bernoulliho rovnica pre ideálnu kvapalinu - zákon zachovania energie

Nestacionárne prúdenie ideálnej tekutiny po prúdnici v prúdovej trubici vyjadruje Eulerova rovnica hydrodynamiky, ktorá vo vektorovom zápise má tvar

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbf{w.grad\ w} = \mathbf{R} - \frac{1}{\rho}\,\mathbf{grad}\, p\,. \qquad (1.6.1)$$



Obr. 1.6.1

V zbierke príkladov je uvažované ustálené jednorozmerné prúdenie ideálnej kvapaliny v silovom, gravitačnom, poli Zeme. Rovnicu (1.6.1) upravíme pre 1 kg prúdiacej tekutiny s prírastkom dĺžky trubice d*l* (obr. 1.6.1), zintegrujeme a dostávame všeobecnú Bernoulliho rovnicu v tvare špecifickej energie

$$e = g\,z + \frac{p}{\rho} + \frac{w^2}{2} = konšt. \qquad [\mathrm{J.kg^{-1}}] \qquad (1.6.2)$$

Rovnica (1.6.2) vyjadruje súčet špecifických energií, polohovej, tlakovej a kinetickej, ktorý je konštantný v ľubovoľnom priereze prúdovej trubice. Ak rovnicu (1.6.2) vydelíme gravitačným zrýchlením *g*, dostaneme Bernoulliho rovnicu v tvare výšok

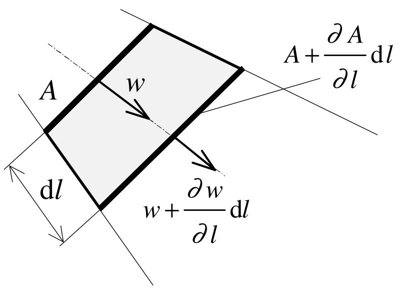
$$H = z + \frac{p}{\rho\, g} + \frac{w^2}{2\, g} = konšt. \qquad [\mathrm{m}] \qquad (1.6.3)$$

Bernoulliho rovnica pre dva ľubovolné prierezy na prúdovej trubice má tvar

$$g\,z_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = g\,z_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2}\,. \qquad [\mathrm{J.kg^{-1}}] \qquad (1.6.4)$$

Rovnica kontinuity - zákon zachovania hmotnosti

Zo zákona o zachovaní hmotnosti, pre prípad stacionárneho prúdenia nestlačiteľnej tekutiny, vyplýva, že hmotnosť tekutiny vytekajúcej z elementárneho objemu za čas dt a hmotnosť tekutiny vtekajúcej do tohto objemu za rovnaký čas, sú rovnaké (obr. 1.6.2), potom platí



Obr. 1.6.2

$$\frac{\partial}{\partial l}(wA) = 0. \qquad (1.6.5)$$

Zo vzťahu (1.6.5) vyplýva, že súčin $w\,A$ sa nemení po celej dĺžke jednoduchého, nerozvetveného potrubia a rovná sa objemovému prietoku Q

$$Q = w\,A = konšt. \qquad [\mathrm{m^3.s^{-1}}] \qquad (1.6.6)$$

1.8 Hydrodynamika reálnej kvapaliny

Bernoulliho rovnica pre reálnu kvapalinu

Pri prúdení reálnej kvapaliny sa časť špecifickej energie mení v dôsledku trenia na teplo, ktorú považujeme za stratovú. Špecifickú stratovú energiu e_z môžeme vyjadriť rozdielom celkových špecifických energií pre dva ľubovoľné body na prúdnici

$$e_z = e_1 - e_2 = g\,z_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} - \left(g\,z_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2}\right).$$

Matematickou úpravou dostaneme výraz

$$g\,z_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = g\,z_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{w_2^2}{2} + e_z. \qquad [\mathrm{J.kg^{-1}}] \qquad (1.8.1)$$

Energia skutočnej prúdiacej kvapaliny sa v smere pohybu zmenšuje v dôsledku hydraulických odporov. Rovnicu (1.8.1) vydelíme gravitačným zrýchlením a dostaneme Bernoulliho rovnicu v tvare výšok

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} + h_z, \qquad [\mathrm{m}] \qquad (1.8.2)$$

kde h_z je špecifická stratová energia vyjadrená v tvare výšky.

Hydraulické odpory pri prúdení

Prúdením reálnej kvapaliny vznikajú hydraulické odpory, čiže straty. Delíme ich na dva druhy, a to *miestne* a *dĺžkové*.

Miestne straty vznikajú všade tam, kde sa mení veľkosť alebo smer rýchlosti prúdenia kvapaliny.

Špecifickú stratovú energiu na miestnom odpore, vypočítame z Weisbachovho vzťahu

$$e_z = \xi \frac{w^2}{2}, \tag{1.8.3}$$

kde ξ je koeficient miestnej straty a w je priemerná rýchlosť v danom úseku potrubia.

Veľkosť *dĺžkovej* stratovej energie e_z môžeme vyjadriť použitím Weisbachovho vzorca v tvare

$$e_z = \lambda \frac{l}{d} \frac{w^2}{2}, \tag{1.8.4}$$

kde w je priemerná rýchlosť, l dĺžka potrubia, d priemer potrubia a $\lambda = \lambda(Re)$ je koeficient odporu trením (koeficient dĺžkovej straty).

Pri laminárnom prúdení ($Re \le 2320$) v potrubí s kruhovým prierezom sa koeficient odporu trením vypočíta pomocou Reynoldsovho čísla zo vzťahu $\lambda = 64/Re$. Pre prúdenia v hladkých potrubiach s Reynoldsovými číslami menšími ako 10^5 vypočítame koeficient dĺžkovej straty zo vzťahu

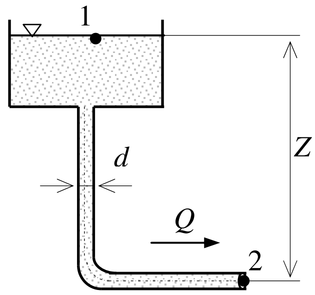
$$\lambda = \frac{0{,}3164}{\sqrt[4]{Re}}; \qquad \text{platí pre } Re \le 10^5. \tag{1.8.5}$$

Pre väčšie hodnoty Reynoldsovho čísla sa hodnota koeficienta dĺžkovej straty počíta podľa vzťahu

$$\frac{1}{\lambda} = 2\log\left(Re\sqrt{\lambda}\right) - 0{,}8; \qquad \text{platí pre } Re \ge 10^5. \tag{1.8.6}$$

Príklad 1.8.2

Voda vyteká z rezervoára potrubím s priemerom $d = 50$ mm do atmosféry (obr. 1.8.2). Objemový prietok vody je $Q = 0{,}00631$ m^3.s^{-1} Dĺžková strata v systéme, v tvare výšky, je $h_L = 11{,}58$ m. Určte výškový rozdiel medzi bodom výtoku vody z potrubia a vodnou hladinou v rezervoári?



Obr. 1.8.2

Dané: $Q = 0{,}00631$ m^3 s^{-1}, $d = 50$ mm, $h_L = 11{,}58$ m,
$\rho = 1000$ kg.m^{-3}

Hľadané: Z

Riešenie: Použijeme Bernoulliho rovnicu pre reálnu kvapalinu v tvare výšok z bodu 1 do bodu 2

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{w_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{w_2^2}{2g} + h_L.$$

Vzhľadom na zvolenú porovnávaciu hladinu v osi horizontálneho potrubia môžeme určiť veličiny:

$z_1 = Z$ $\quad p_1 = 0$ $\quad w_1 = 0$

$z_2 = 0$ $\quad p_2 = 0$ $\quad w_2 = w_2$.

Dosadením určených veličín do vyššie uvedenej Bernoulliho rovnice dostaneme výraz

$$Z = \frac{w_2^2}{2g} + h_L. \tag{1.8.9}$$

Rýchlosť w_2 vypočítame z definície objemového prietoku $Q = w_2 A$

$$w_2 = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{4.0{,}00631}{3{,}14.0{,}05^2} = 3{,}215 \text{ m.s}^{-1}.$$

Vypočítanú rýchlosť w_2 dosadíme do rovnice (1.8.9) a vypočítame výškový rozdiel Z

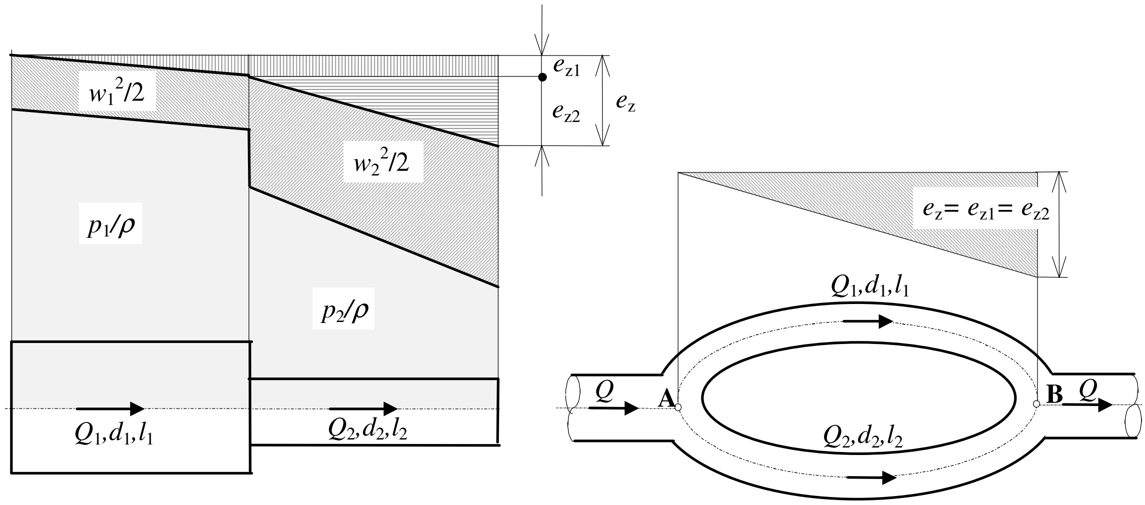
$$Z = \frac{3{,}215^2}{2.9{,}81} + 11{,}58 = 12{,}1\,\text{m}.$$

1.9 Zložené potrubie

Zložené potrubia vznikajú spojením rôznych potrubí:

1. za sebou - sériové potrubie,
2. vedľa seba - paralelné potrubie,
3. kombinovaným spojením vzniká potrubný systém.

Pri hydraulickom výpočte zloženého potrubia je cieľom určenie správnej závislosti medzi objemovým prietokom, rýchlosťou prúdenia a odpormi. Ktorákoľvek z uvedených veličín môže byť zadaná pri riešení danej úlohy. Druhú veličinu je potrebné správne navrhnúť a tretiu veličinu potom vypočítať. Pri výpočte vychádzame z Bernoulliho rovnice reálnej kvapaliny pre vhodne zvolenú prúdnicu, na ktorej poznáme všetky parametre toku z rovnice kontinuity, okrem jedného.



Obr. 1.9.1a Obr. 1.9.1b

Najskôr budeme uvažovať sériové potrubie (obr. 1.9.1a). Pre objemový prietok platí rovnica kontinuity

$$Q = Q_1 = Q_2. \qquad [\text{m}^3.\text{s}^{-1}] \qquad (1.9.1)$$

Z grafického znázornenia Bernoulliho rovnice, pre $z_1 = z_2$ vyplýva (obr. 1.9.1a), že miestnu špecifickú stratovú energiu zanedbávame. Potom platí, že

$$e_z = e_{z1} + e_{z2}. \qquad [\text{J.kg}^{-1}] \qquad (1.9.2)$$

Paralelné potrubie (obr. 1.9.1b). Potom z rovnice kontinuity vyplýva, že celkový objemový prietok Q je súčet objemových prietokov v jednotlivých vetvách zloženého potrubia, čo vyjadruje vzťah

$$Q = Q_1 + Q_2. \qquad [\text{m}^3.\text{s}^{-1}] \qquad (1.9.3)$$

Ak zostavíme Bernoulliho rovnicu pre prúdnicu medzi spoločnými bodmi paralelného potrubia, pre $z_A = z_B$ (obr. 1.9.1b), potom pre 1. vetvu medzi bodmi A, B napíšeme Bernoulliho rovnicu

$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} = \frac{p_B}{\rho} + \frac{w_1^2}{2} + e_{z1},$$

$$e_{z1} = \frac{p_A - p_B}{\rho}. \qquad [\text{J.kg}^{-1}] \qquad (1.9.4)$$

Analogicky získame špecifickú dĺžkovú stratovú energiu pre 2. vetvu

$$e_{z2} = \frac{p_A - p_B}{\rho}. \qquad [\text{J.kg}^{-1}] \qquad (1.9.5)$$

Pre špecifickú dĺžkovú stratovú energiu potom platí rovnosť

$$e_z = e_{z1} = e_{z2}. \qquad [\text{J.kg}^{-1}] \qquad (1.9.6)$$

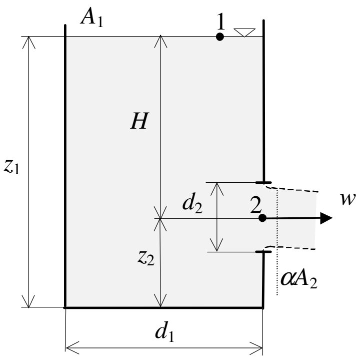
1.7 Prúdenie kvapalín v technických zariadeniach

Výtok z nádob

Výtok z nádoby považujeme za ustálené prúdenie v takom prípade, ak vytekajúci objemový prietok tekutiny sa rovná jej prítoku do nádoby.

Výtok kvapalín z nádob s malým otvorom

Uvažujme nádobu, v ktorej je ustálená hladina vo výške z_1 od dna nádoby. Na bočnej strane nádoby je otvor s plochou prierezu A_2, ktorý je podstatne menší ako celkový prierez nádoby A_1. Malý otvor je taký otvor, pre ktorý platí pomer $d_2/H \leq 10$. Objemový prietok kvapaliny daným otvorom určíme z Bernoulliho rovnice pre reálnu tekutinu, ktorá prúdi z bodu 1 do bodu 2 (obr. 1.7.1)



Obr. 1.7.1

$$\frac{w_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + g\,z_1 = \frac{w_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + g\,z_2 + e_z. \qquad [\mathrm{J.kg^{-1}}] \qquad (1.7.1)$$

Rýchlosť kvapaliny w_1 na hladine môžeme zanedbať ($w_1 = 0$). Potom rýchlosť vytekajúcej kvapaliny z otvoru je $w_2 = w$. Dosadením za špecifickú stratovú energiu $e_z = \xi\dfrac{w^2}{2}$ a úpravou rovnice (1.7.1) dostaneme výraz

$$w = \sqrt{\frac{2g\left(z_1 - z_2 + \dfrac{p_1 - p_2}{\rho}\right)}{1+\xi}}\,. \qquad [\mathrm{m.s^{-1}}] \qquad (1.7.2)$$

Rozdiel tlakov vo výraze (1.7.2) je rovný nule, ak $p_1 = p_2$. Rozdiel potenciálnych výšok predstavuje pri výtoku do atmosféry spád H. Po úprave môžeme predchádzajúci výraz prepísať do tvaru

$$w = \frac{1}{1+\xi}\,\sqrt{2gH}\,.$$

Zlomok pred odmocninou označíme koeficientom rýchlosti φ a výraz pre rýchlosť nadobudne tvar

$$w = \varphi\,\sqrt{2\,g\,H}\,. \qquad [\mathrm{m.s^{-1}}] \qquad (1.7.3)$$

Pri výtoku kvapaliny z otvoru s ostrými hranami nevypĺňa prúd vytekajúcej kvapaliny celý prierez výtokového otvoru. Tento jav nazývame kontrakciou. Koeficient kontrakcie α závisí od tvaru výtokového otvoru. Potom objemový prietok kvapaliny uvažovaným otvorom bude

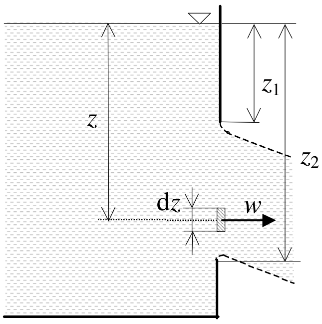
$$Q = \alpha A_2\, w = \varphi\,\alpha A_2 \sqrt{2\,g\,H}\,. \qquad [\mathrm{m^3.s^{-1}}] \qquad (1.7.4)$$

Koeficient výtoku $\mu = \varphi\,\alpha$ charakterizuje rôzne tvary výtokových otvorov. Potom všeobecný výraz pre objemový prietok kvapaliny malým otvorom má tvar

$$Q = \mu A_2 \sqrt{2\,g\,H}\,. \qquad [\mathrm{m^3.s^{-1}}] \qquad (1.7.5)$$

Výtok kvapaliny veľkým otvorom

Ak pre výškový rozmer otvoru platí, že $d > 0{,}1z$, potom nemôžeme zanedbať zmenu hydrostatického tlaku po výške otvoru. Úlohu riešime integráciou elementárneho objemového prietoku po ploche otvoru (obr. 1.7.2). Najjednoduchší je prípad, keď šírka otvoru sa nemení s jeho výškou. Potom elementárny objemový prietok sa rovná



Obr. 1.7.2

$$\mathrm{d}Q = \mu\, b \sqrt{2\, g\, z}\;\; \mathrm{d}z,$$

kde b je šírka otvoru. Celkový objemový prietok je vyjadrený

$$Q = \frac{2}{3} \mu\, b \sqrt{2\, g} \left[z_2^{\frac{3}{2}} - z_1^{\frac{3}{2}} \right]. \qquad [\mathrm{m^3.s^{-1}}] \qquad (1.7.6)$$

Ak geometrický tvar veľkého otvoru je iný ako obdĺžnik, potom musíme pred integráciou vyjadriť závislosť šírky otvoru od výšky a dosadiť ju do vzťahu pre výpočet elementárneho prietoku. Zvláštnymi prípadmi výtoku z veľkých otvorov sú prúdenia cez prepady.