1 MECHANIKA TEKUTÍN

1.2 Hydrostatika nestlačiteľnej kvapaliny

Hydrostatika sa zaoberá skúmaním tekutín, ktoré sa vzhľadom na ohraničený priestor nepohybujú.

Eulerova rovnica hydrostatiky

Rovnováhu objemových a povrchových síl v tekutine, ktorá sa nepohybuje, je nestlačiteľná a homogénna, vyjadruje *Eulerova rovnica hydrostatiky*. V kartézskom súradnicovom systéme má Eulerova rovnica tvar

$$R_x\,dx + R_y\,dy + R_z\,dz = \frac{1}{\rho}\,dp\,, \qquad (1.2.1)$$

kde R_x, R_y a R_z sú zložky jednotkovej objemovej sily R.

V priestore zaplnenom tekutinou existujú plochy, na ktorých je tlak konštantný. Tieto plochy sa nazývajú ekvipotenciálne alebo hladinové. Rovnicu hladinových plôch získame z (1.2.1), ak $dp = 0$

$$R_x\,dx + R_y\,dy + R_z\,dz = 0. \qquad (1.2.2)$$

Tekutina v poli zemskej príťažlivosti

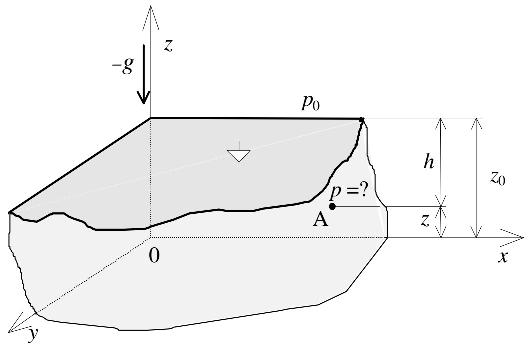
Tekutina sa nachádza v absolútnom pokoji v gravitačnom poli Zeme. Na každú časticu tekutiny pôsobí iba jediná objemová sila, zemská príťažlivosť (obr. 1.2.1). Zložky jednotkovej objemovej sily majú nasledovné hodnoty:

$$R_x = 0,\ R_y = 0,\ R_z = -\,g.$$

Po dosadení do rovnice (1.2.2) a integrovaní, rovnica ekvipotenciálnej plochy nadobudne tvar

$$z = \textit{konšt}., \qquad (1.2.3)$$

teda hladinové plochy sú vodorovné roviny.



Obr. 1.2.1

Rozloženie absolútneho tlaku v tekutine získame z rovnice (1.2.1) po jej integrovaní a dosadení podmienok jednoznačnosti

$$p = p_0 + \rho\, g\, h = p_0 + p_h. \qquad \text{[Pa]} \qquad (1.2.4)$$

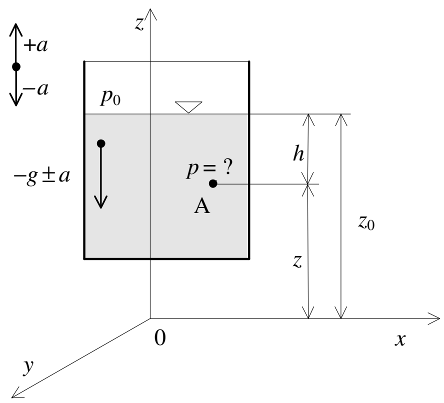
Absolútny tlak p v ľubovoľnom bode tekutiny sa rovná súčtu atmosferického (vonkajšieho) tlaku p_0 a hydrostatického tlaku p_h, ktorého hodnota závisí od hustoty kvapaliny a hĺbky bodu pod hladinou.

1.3 Relatívny pokoj kvapaliny

O relatívnom pokoji kvapaliny hovoríme vtedy, ak je kvapalina vzhľadom na nádobu, v ktorej sa nachádza, v pokoji a samotná nádoba sa pohybuje vzhľadom na Zem. V praxi sa najčastejšie vyskytujú nasledovné prípady relatívneho pokoja kvapaliny:

1. translačný pohyb nádoby zvislým smerom,
2. translačný pohyb nádoby vodorovným smerom,
3. rotačný pohyb nádoby okolo zvislej osi.

Translačný pohyb nádoby zvislým smerom



Obr. 1.3.1

Nádoba naplnená kvapalinou sa pohybuje rovnomerne zrýchleným pohybom zvislým smerom v smere súradnicovej osi z (obr. 1.3.1). Výsledná objemová sila sa skladá zo sily zotrvačnej a gravitačnej. V prípade pohybu zvislým smerom nahor (nadol) jednotkové objemové sily majú nasledovné hodnoty:

$$R_x = 0,\ R_y = 0,\ R_z = -g \pm a.$$

Dosadením hodnôt do (1.2.2) dostaneme rovnicu pre ekvipotenciálne plochy v tvare

$$z = konšt. \qquad (1.3.1)$$

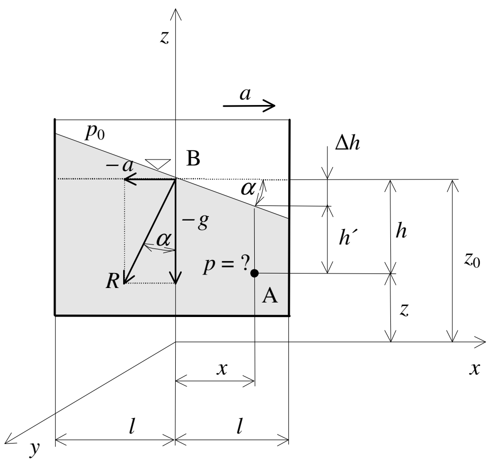
Absolútny tlak v ľubovoľnom bode kvapaliny určíme z Eulerovej rovnice hydrostatiky (1.2.1)

$$p = p_0 + \rho\, g\, h \pm \rho\, g\, a = p_0 + p_h + \Delta p. \qquad [\mathrm{Pa}] \qquad (1.3.2)$$

kde $h = (z_0 - z)$ a $\Delta p = \pm \rho\, a\, h$ je prírastok tlaku v dôsledku relatívneho pokoja kvapaliny, p_h je hydrostatický tlak.

Znamienko $-$ platí pre zrýchlenie a pri pohybe nádoby nadol a znamienko $+$ pri pohybe nahor.

Translačný pohyb nádoby vodorovným smerom



Obr. 1.3.2

Nádoba s kvapalinou sa pohybuje rovnomerne zrýchleným pohybom v smere súradnicovej osi x (obr. 1.3.2). Na častice kvapaliny pôsobí výsledná objemová sila, ktorá sa skladá z gravitačnej sily v smere súradnicovej osi z a zotrvačnej sily v smere súradnicovej osi x. Potom jednotkové objemové sily sa rovnajú:

$$R_x = \pm a,\ R_y = 0,\ R_z = -g.$$

Rovnica ekvipotenciálnych plôch má tvar

$$z = \pm \frac{a}{g} x + konšt. \qquad [\mathrm{m}] \qquad (1.3.3)$$

Z rovnice (1.3.3) vyplýva, že ekvipotenciálne plochy sú naklonené roviny, ktoré zvierajú s rovinou xy uhol α

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{a}{g}. \qquad (1.3.4)$$

Absolútny tlak v ľubovoľnom bode kvapaliny je

$$p = p_0 + \rho\, g\,(z_0 - z) \pm \rho\, a\, x = p_0 + p_\mathrm{h} + \Delta p. \qquad \text{[Pa]} \qquad (1.3.5)$$

Podľa obr. 1.3.2 platí: $h = (z_0 - z)$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{g} = \frac{\Delta h}{x}$ a $h' = h - \Delta h$.

Z rovnice (1.3.5) vyplýva, že absolútny tlak v ľubovoľnom bode pod hladinou môžeme vyjadriť ako súčet vonkajšieho, hydrostatického tlaku a prírastku tlaku v dôsledku relatívneho pokoja kvapaliny.

Rotačný pohyb nádoby okolo zvislej osi

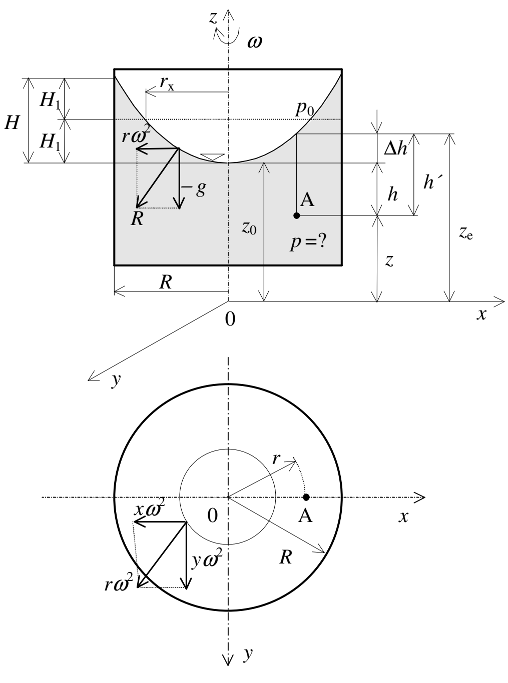
Nádoba s kvapalinou sa otáča okolo zvislej osi uhlovou rýchlosťou ω, (obr. 1.3.3). Na častice kvapaliny pôsobí výsledná objemová sila, ktorá sa skladá z gravitačnej a odstredivej sily, $F_0 = m r \omega^2$. Jednotkové objemové sily v smere súradnicových osí budú:

$$R_\mathrm{x} = x\,\omega^2,\; R_\mathrm{y} = y\,\omega^2,\; R_\mathrm{z} = -g.$$

Rovnica ekvipotencionálnych plôch bude mať tvar:

$$\frac{r^2}{2g}\omega^2 - z = konšt. \qquad \text{[m]} \qquad (1.3.6)$$

Ekvipotenciálne plochy sú rotačné paraboloidy, ktoré sa otáčajú okolo zvislej osi z. Paraboloidy majú vrchol obrátený smerom nadol. Rovnica voľnej ekvipotenciálnej plochy má tvar:



Obr. 1.3.3

$$z_\mathrm{e} - z_0 = \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{u^2}{2g}, \text{ [m]} \qquad (1.3.7)$$

kde u je obvodová rýchlosť na polomere r.

Celková výška paraboloidu na polomere R bude

$$H = \frac{\omega^2 R^2}{2g} \qquad \text{[m]} \qquad (1.3.10)$$

Z vlastností rotačného paraboloidu vyplýva, že výška, o ktorú paraboloid na obvode nádoby vystúpi nad pôvodnú hladinu, sa rovná výške, o ktorú klesne v osi nádoby pod pôvodnú hladinu. Celková výška paraboloidu je

$H = 2\, H_1$.

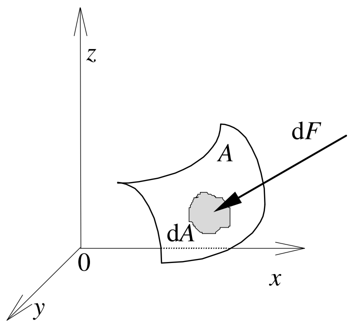
Kružnica, v ktorej sa pretínajú rotačné paraboloidy voľnej hladiny s pôvodnou voľnou hladinou, závisí len od polomeru nádoby a jej polomer je $r_\mathrm{x} = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

Absolútny tlak v ľubovoľnom mieste kvapaliny rotujúcej okolo zvislej osi v poli zemskej príťažlivosti vypočítame zo vzťahu

$$p = p_0 + \rho\, g\, h + \rho \frac{u^2}{2} = p_0 + p_{\mathrm{h}} + \Delta p, \qquad \text{[Pa]} \qquad (1.3.8)$$

kde $h = (z_0 - z)$.

1.4 Tlaková sila na plochu



Obr. 1.4.1

Účinok tlaku tekutiny pôsobiaceho na plochu sa prejavuje silou. Tlakovú silu uvažujeme ako súčet elementárnych síl $\mathrm{d}F$ pôsobiacich na elementy dA, ktoré tvoria celkovú plochu A (obr. 1.4.1). Tlaková sila na element bude definovaná

$$\mathrm{d}F = p\,\mathrm{d}A \quad \text{alebo} \quad F = \int_A p\,\mathrm{d}A\,. \quad \text{[N]} \qquad (1.4.1)$$

Tlaková sila je vždy kolmá na plochu a bod, v ktorom pôsobí, nazývame pôsobiskom sily.

Tlaková sila na rovinnú plochu od rovnomerne rozloženého tlaku

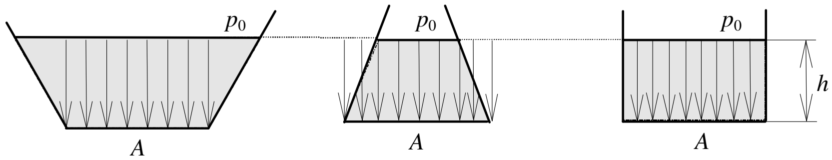
Pre prípad rovnomerne rozloženého tlaku pôsobiaceho na rovinnú plochu bude veľkosť tlaku v každom bode plochy rovnaká, t. j. p = *konšt.* Potom celková sila pôsobiaca na plochu A bude $F = pA$. Pôsobisko sily sa nachádza v ťažisku plochy A. Tento prípad môže nastať za nasledovných podmienok:

a) Nech na rovinnú plochu pôsobí tlak plynu. V priestore zaplnenom plynom považujeme tlak za konštantný, rovný atmosferickému, resp. vonkajšiemu tlaku p_0. Sila F sa potom bude rovnať $F = p_0 A$.

b) Pri pohybe nádoby voľným pádom sa tlak $p = p_0$ a pôsobiaca sila na rovinnú plochu bude $F = p_0 A$.

c) Tlak pôsobí na vodorovnú rovinnú plochu, ktorá je ekvipotenciálna hladina, napr. na dno nádoby (obr. 1.4.2). V každom bode dna nádoby bude rovnaký tlak $p = p_0 + \rho\, g\, h$. Potom veľkosť sily bude

$$F = (p_0 + \rho\, g\, h) A\,. \qquad \text{[N]} \qquad (1.4.2)$$



Obr. 1.4.2

Veľkosť hydrostatickej sily pôsobiacej na dno nádoby nezávisí od tvaru nádoby, ale len od výšky stĺpca kvapaliny.

Tlaková sila na rovinnú plochu od nerovnomerne rozloženého tlaku

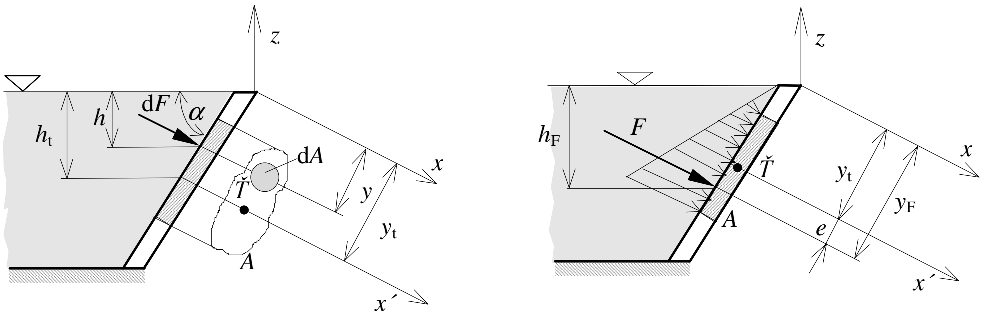
Rovinná plocha sa nachádza pod voľnou hladinou kvapaliny. Rovinná plocha je sklonená od vodorovnej roviny o uhol α. Na voľnú hladinu pôsobí atmosferický tlak ($p_0 = 0$) a kvapalina je v pokoji. Podľa obr. 1.4.3 bude plocha A zaťažovaná tlakovou silou F iba od hydrostatického tlaku, ktorého hodnota sa mení s hĺbkou h. Potom celkovú tlakovú silu F vypočítame

$$F = \rho\, g \sin\alpha \int_A y \,\mathrm{d}A \,. \qquad \text{[N]} \qquad (1.4.3)$$

Integrál vo výraze (1.4.3) vyjadruje statický moment plochy A vzhľadom na súradnicovú os x

$$I_{\mathrm{st}} = \int_A y \,\mathrm{d}A = y_{\mathrm{t}} A \,. \qquad [\mathrm{m}^3] \qquad (1.4.4)$$

Z obr. 1.4.3 vyplýva: $\sin\alpha = \dfrac{h_{\mathrm{t}}}{y_{\mathrm{t}}}$ a hĺbka ťažiska plochy je $h_{\mathrm{t}} = y_{\mathrm{t}} \sin\alpha$.



Obr. 1.4.3

Hodnota tlakovej sily, ktorá pôsobí na celú plochu A sa vypočíta

$$F = \rho\, g\, h_{\mathrm{t}} A \,. \qquad \text{[N]} \qquad (1.4.5)$$

Pôsobisko tlakovej sily y_{F} vypočítame z rovnosti momentov výslednej sily F a elementárnych síl $\mathrm{d}F$. Pôsobisko tlakovej sily nebude v ťažisku plochy, ale bude posunuté o určitú hodnotu e (excentricitu) pod ťažiskom plochy. Platí

$$y_{\mathrm{F}} = y_{\mathrm{t}} + e = y_{\mathrm{t}} + \frac{I_{x'}}{I_{\mathrm{st}}} \,, \qquad \text{[m]} \qquad (1.4.6)$$

kde $I_{x'}$ je moment zotrvačnosti plochy A k osi x', ktorá prechádza ťažiskom plochy a $e = \dfrac{I_{x'}}{I_{\mathrm{st}}}$.

Hĺbka pôsobiska tlakovej sily h_{F} je definovaná výrazom (obr. 1.4.3)

$$h_{\mathrm{F}} = h_{\mathrm{t}} + e \sin\alpha. \qquad \text{[m]} \qquad (1.4.7)$$

V prípade, že na voľnú hladinu pôsobí vonkajší tlak, môžeme veľkosť tlakovej sily pôsobiacej na rovinnú plochu vypočítať ako súčet tlakových síl od vonkajšieho tlaku a od hydrostatického tlaku (obr. 1.4.4a),

$$F = p_{\mathrm{pr}} A + \rho\, g\, h_{\mathrm{t}} A \qquad \text{[N]} \qquad (1.4.8)$$

Pôsobisko tlakovej sily F je v ťažisku zaťažovacieho obrazca tlaku. Určíme ho zo známych pôsobísk tlakovej sily od vonkajšieho tlaku a tlakovej sily od hydrostatického tlaku. Takýmto spôsobom postupujeme vždy, ak pod voľnou hladinou je iba časť rovinnej plochy (obr. 1.4.4b). Ak je celá rovinná plocha pod voľnou hladinou, potom výpočet zjednodušíme pomocou redukovanej hladiny.

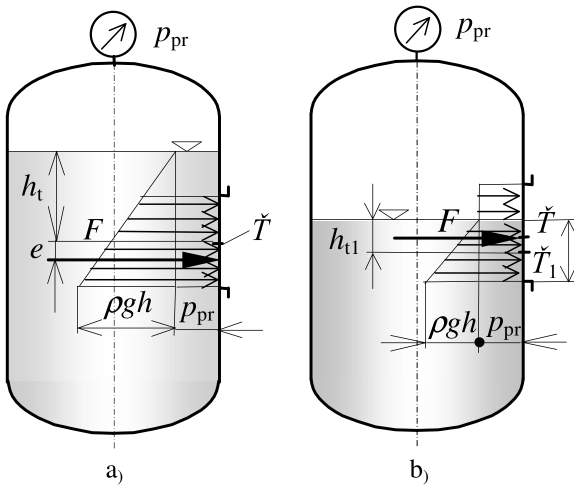
Redukovaná hladina je fiktívna hladina, do ktorej by vystúpila kvapalina v prípade, že by na ňu pôsobil atmosferický tlak (obr. 1.4.5). Redukovanú hladinu určíme tak, že pripočítame ku skutočnej hladine kvapaliny výšku fiktívnej hladiny h_{red}, ktorú vypočítame

$$h_{red} = \frac{p_{pr}}{\rho g} \qquad [m] \qquad (1.4.9)$$

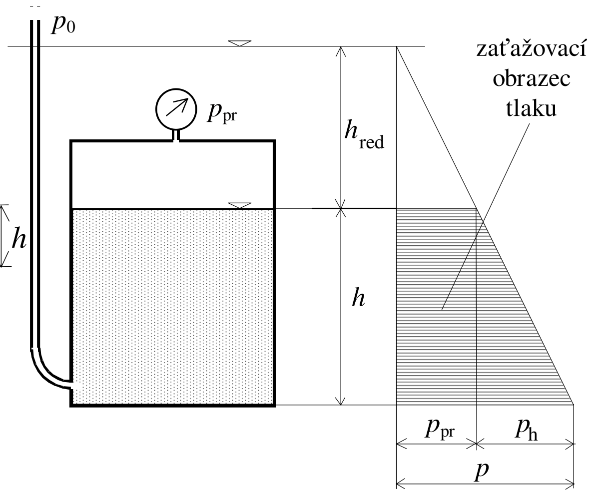
Rovnicu (1.4.9) upravíme na tvar

$$\frac{p}{\rho g} = h_{red} + h \,. \qquad [m] \qquad (1.4.10)$$

Vo vzťahu (1.4.10) na pravej strane je tlak vyjadrený pomocou výšky kvapalinového stĺpca, ktorú nazývame tlakovou výškou.



Obr.1.4.4



Obr.1.4.5

1.5 Tlaková sila na všeobecnú plochu

Tlaková sila na všeobecnú plochu od rovnomerne rozloženého tlaku

O pôsobení tlakovej sily na všeobecnú plochu od rovnomerne rozloženého tlaku hovoríme vtedy, ak je tlak konštantný na celej ploche. Napríklad nech $p = p_0$ (atmosferický, vonkajší tlak). Potom zložky tlakovej sily v smere osí x, y, z sa rovnajú:

$$F_x = p_0 \int_{A_x} \mathrm{d}A_x = p_0 A_x,\ F_y = p_0 \int_{A_y} \mathrm{d}A_y = p_0 A_y,\ F_z = p_0 \int_{A_z} \mathrm{d}A_z = p_0 A_z . [\mathrm{N}] \qquad (1.5.1)$$

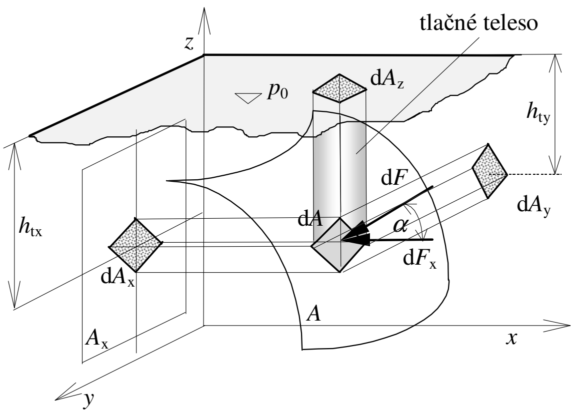
Plocha A_x je plocha kolmého priemetu všeobecnej plochy A v smere osi x do roviny yz, A_y v smere y do roviny xz a A_z v smere z do roviny xy. Hodnotu celkovej tlakovej sily vypočítame zo vzťahu

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}\,. \qquad [\mathrm{N}] \qquad (1.5.2)$$

Smer výslednej tlakovej sily sa určí zo smerových kosínov

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F}, \qquad \cos\beta = \frac{F_y}{F}, \qquad \cos\gamma = \frac{F_z}{F}. \qquad (1.5.3)$$

Tlaková sila na všeobecnú plochu od nerovnomerne rozloženého tlaku



Obr. 1.5.1

Predpokladáme, že absolútny tlak v tekutine sa mení v súlade s podmienkami jednoznačnosti podľa (1.2.1). Zložky tlakovej sily (obr. 1.5.1) v smere osí x, y, z vypočítame pre $\mathrm{i} = x, y, z$:

$$F_\mathrm{i} = \rho g \int_{A_\mathrm{i}} h \,\mathrm{d}A_\mathrm{i}. \quad [\mathrm{N}] \qquad (1.5.4)$$

Ak sú známe tvary a plochy kolmých priemetov všeobecnej plochy do jednotlivých rovín, potom je známa aj vzdialenosť ťažiska priemetov plôch od voľnej hladiny h_{tx} a h_{ty}. Pre zložky F_x a F_y platí:

$$F_x = \rho g h_{tx} A_x. \qquad [\mathrm{N}] \qquad (1.5.5)$$

$$F_y = \rho g h_{ty} A_y. \qquad [\mathrm{N}] \qquad (1.5.6)$$

Zložku tlakovej sily vo zvislom smere (os z) vyjadrujeme vzťahom

$$F_z = \rho g V_z. \qquad [\mathrm{N}] \qquad (1.5.7)$$

Objem V_z predstavuje tzv. objem tlačného telesa, uzavretého zvislicami medzi danou plochou a jej zvislým priemetom na voľnú hladinu, resp. redukovanú hladinu, (rovnica 1.5.4 pre i = z). Zvislú zložku tlakovej sily určujeme ako tiaž tlačného telesa. Keď je objem tlačného telesa určovaný z vonkajšej (neomočenej) strany plochy, vtedy sila F_z pôsobí smerom hore.

Veľkosť tlakovej sily vypočítame podľa vzťahu (1.5.2) a jej smer podľa (1.5.3). Miesto pôsobenia celkovej tlakovej sily určíme z pôsobísk jednotlivých zložiek síl. Vodorovné zložky tlakovej sily F_x a F_y majú pôsobisko v ťažisku zaťažovacieho obrazca tlaku. Pôsobisko zvislej zložky tlakovej sily sa nachádza v ťažisku tlačného telesa.

Príklad 1.5.1

Vypočítajte veľkosť vertikálnej a horizontálnej sily pôsobiacej na valcový uzáver, ktorý oddeľuje dve nádrže naplnené vodou (obr. 1.5.2). Výška hladiny vody v prvej nádrži je $h_1 = 3$ m a v druhej nádrži je hladina vody vo výške $h_2 = 1{,}5$ m. Polomer valca je $r = 1{,}5$ m a dĺžka valca je $L = 12$ m. Ďalej vypočítajte veľkosť výslednej tlakovej sily a smer jej pôsobenia.

Dané: $h_1 = 3$ m, $h_2 = 1{,}5$ m, $r = 1{,}5$ m, $L = 12$ m, $\rho = 1000$ kg.m^{-3}
Hľadané: F_x, F_z, F, α

Riešenie: Výpočet horizontálnej sily je podľa (1.5.5) ako rozdiel pôsobiacich síl v smere osi x

$$F_x = F_{x1} - F_{x2}$$

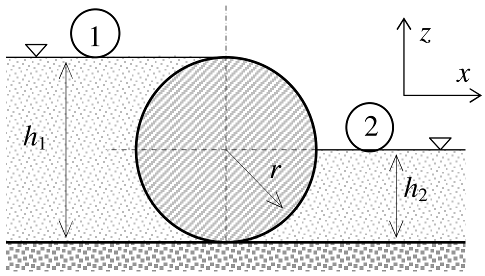
$$F_x = \rho g h_{tx1} A_{x1} - \rho g h_{tx2} A_{x2}$$

$$h_{tx1} = \frac{h_1}{2}, \qquad A_{x1} = h_1 L$$

$$h_{tx2} = \frac{h_2}{2}, \qquad A_{x2} = h_2 L$$

$$F_x = \frac{\rho g L}{2}\left(h_1^2 - h_2^2\right) = \frac{1000.9{,}81.12}{2}\left(3^2 - 1{,}5^2\right)$$

$$F_x = 397305 \text{ N.}$$



Obr. 1.5.2

Výpočet vertikálnej sily v smere osi z je podľa vzťahu (1.5.7). Tlačné teleso sa vzhľadom na valcový uzáver určuje z vonkajšej strany(obr. 1.5.4), t. j. zložka tlakovej sily F_z bude pôsobiť hore (v kladnom smere osi z).

$$F_z = \rho g V_z, \qquad V_z = \frac{3}{4}\pi r^2 L = \frac{3}{4}\pi.1{,}5^2.12 = 63{,}62 \text{ m}^3$$

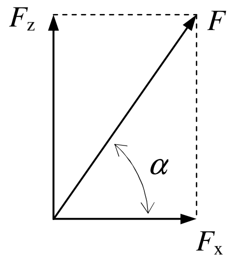
$$F_z = 1000.9{,}81.63{,}62$$

$$F_z = 624112{,}2 \text{ N.}$$

Veľkosť výslednej tlakovej sily vypočítame analogicky zo vzťahu (1.5.2)

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = \sqrt{397305^2 + 624112{,}2^2}$$

$$F = 739842{,}8 \text{ N.}$$



Obr. 1.5.3

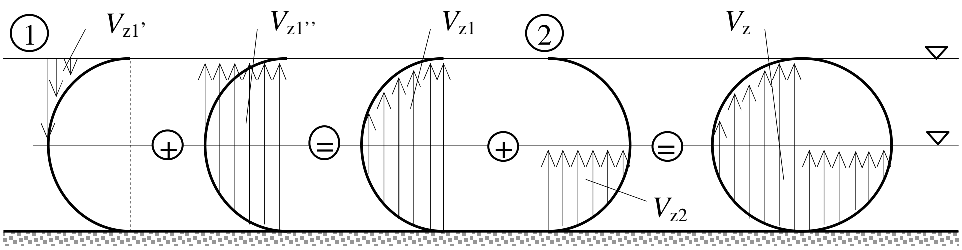
Smer pôsobenia výslednej tlakovej sily určíme z pomeru veľkostí jej zložiek podľa vzťahu (1.5.3)

$$\cos\alpha = \frac{F_x}{F} = \frac{397305}{739842{,}8}$$

$$\cos\alpha = 0{,}537$$

$$\alpha = 57{,}5°.$$

Grafické riešenie zložky tlakovej sily F_z pomocou tlačných objemov kvapalín pôsobiacich na valcový uzáver je zobrazené na (obr. 1.5.4).



Obr. 1.5.4