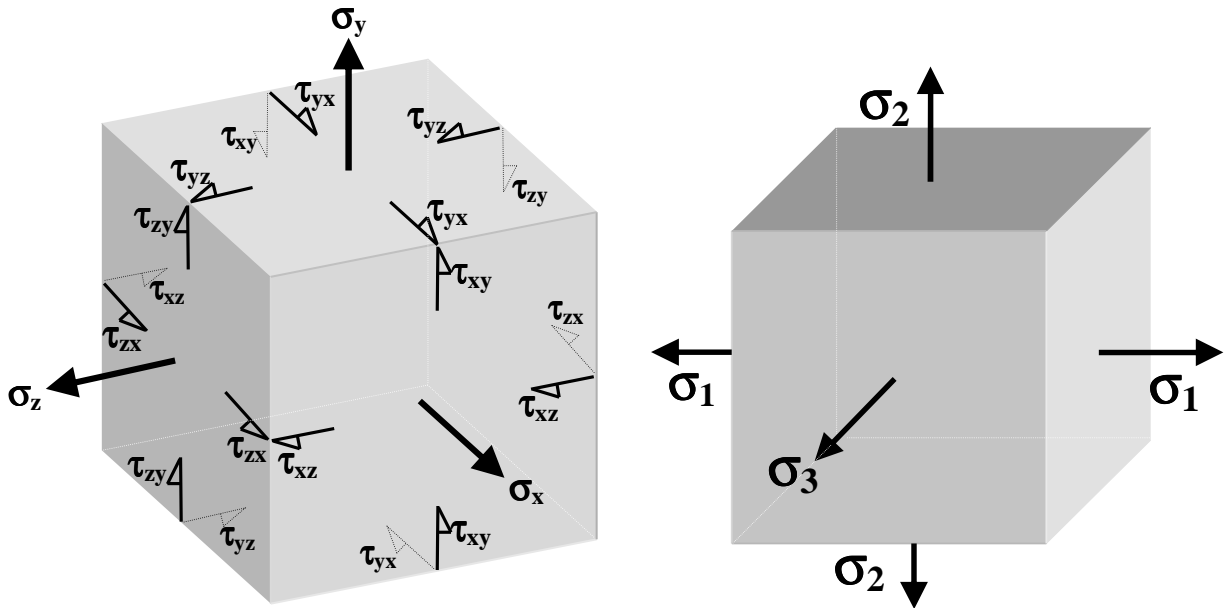


NAPÄTOSŤ A DEFORMÁCIA

NAPÄTOSŤ V BODE TELESA, DRUHY NAPÄTOSTI



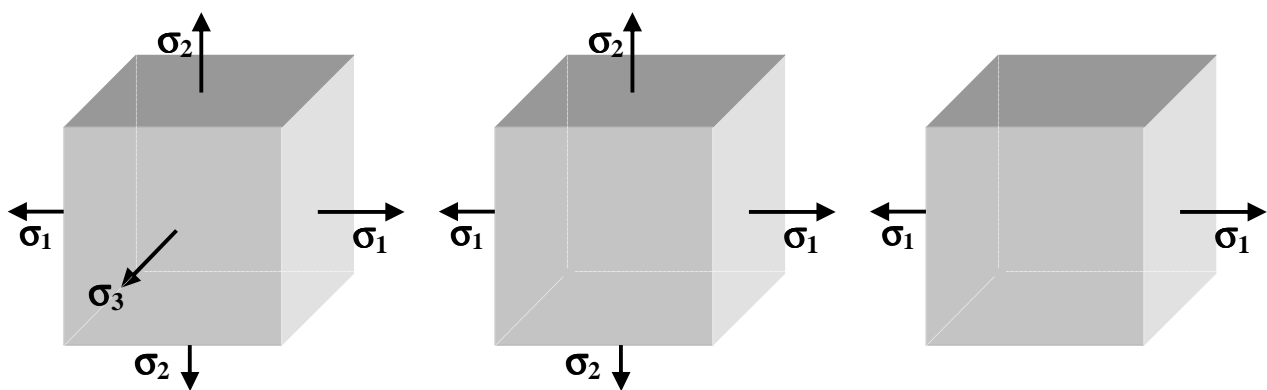
$$\mathbf{T}_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_z$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_x$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_y$$

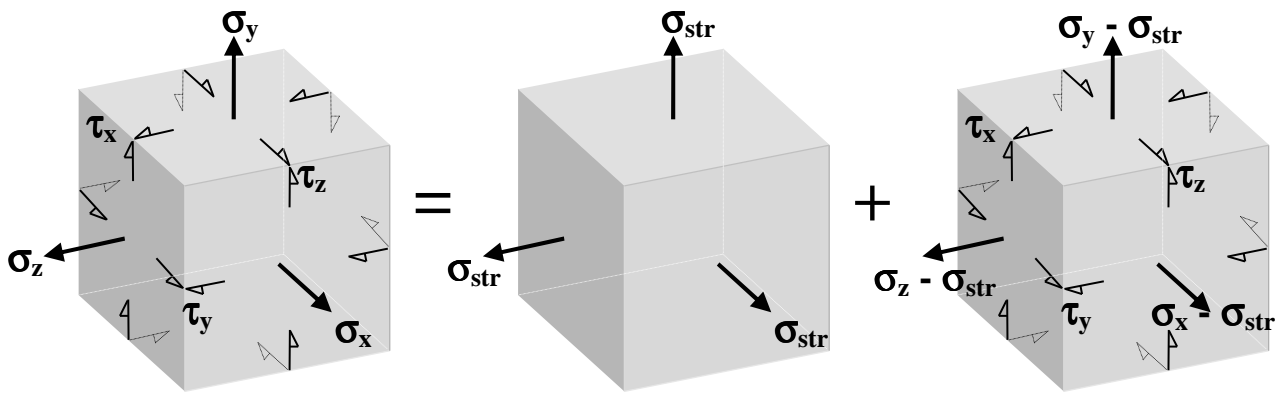
pretože sa dá dokázať:



trojosová
(priestorová)
napätosť

dvojosová
(rovinná)
napätosť

jednoosová
(priamková)
napätosť



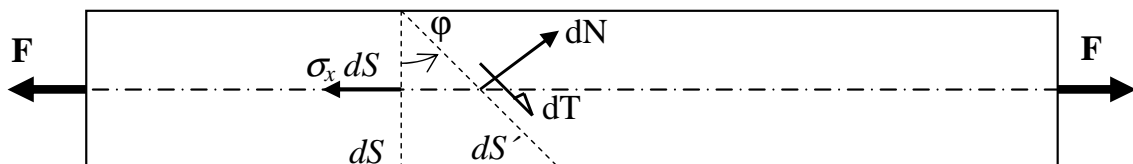
$$\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_{str} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{str} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{str} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_{str} & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y - \sigma_{str} & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z - \sigma_{str} \end{vmatrix}$$

tenzor napätia = guľový tenzor + deviator napätia
 $\mathbf{T}^\sigma = \mathbf{T}^o + \mathbf{D}$

kde stredné (oktaedrické) napätie sa rovná

$$\sigma_{str} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \sigma_{okt} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

JEDNOSOSOVÁ NAPÄTOSŤ



$$\sum F_n = 0: \quad \sigma \frac{dS}{\cos \varphi} - \sigma_x dS \cos \varphi = 0$$

$$\sum F_t = 0: \quad \tau \frac{dS}{\cos \varphi} - \sigma_x dS \sin \varphi = 0$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \quad \sin^2 \varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \quad \sin \varphi \cos \varphi = \frac{\sin 2\varphi}{2}$$

$$\sigma = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{\sigma_x}{2} \cos 2\varphi$$

$$\tau = \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\varphi$$

DVOJOSOVÁ NAPĚTOST MOHROVA KRUŽNICA ROVINNEJ NAPĚTOSTI

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2}$$

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\varphi + \tau_z \sin 2\varphi$$

$$\tau = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\varphi - \tau_z \cos 2\varphi$$

$$\sin 2\varphi_0 = \frac{\tau_z}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2}} \quad \cos 2\varphi_0 = \frac{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2}}$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{2\tau_z}{\sigma_x - \sigma_y}$$

PRETVORENIE V BODE TELESA (ROVINNÁ NAPÄTOSŤ)

$$\sigma_x \approx \varepsilon_x \quad \sigma_y \approx \varepsilon_y \quad \tau_z \approx \frac{\gamma_z}{2}$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + \gamma_z^2}$$

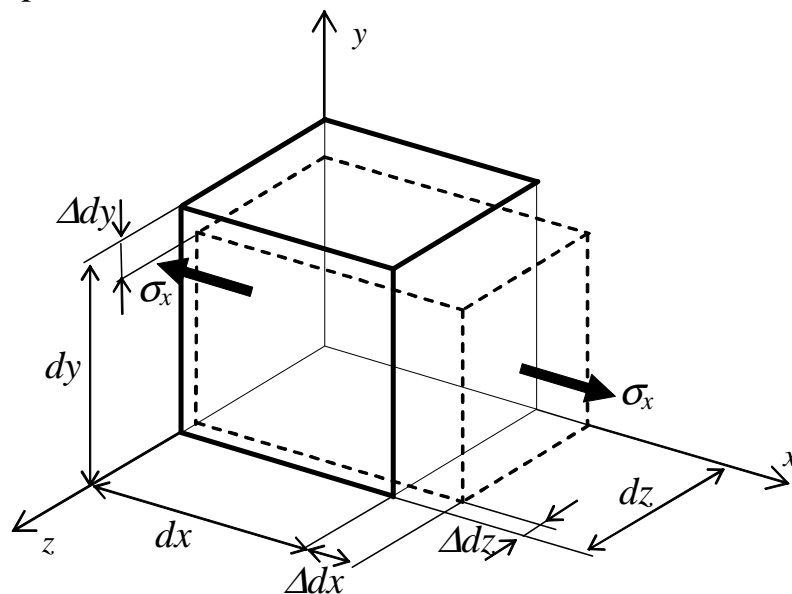
$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cos 2\varphi + \frac{1}{2}\gamma_z \sin 2\varphi$$

$$\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \sin 2\varphi - \frac{1}{2}\gamma_z \cos 2\varphi$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi_0 = \frac{\gamma_z}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

SÚVIS MEDZI NAPÄTOSŤOU A PRETVORENÍM ROVNICE ELASTICITY

Jednoosová napätosť:



$$\varepsilon_x = \frac{\Delta dx}{dx} = \frac{\sigma_x}{E} \text{ - Hookov zákon}$$

priečne zúženia:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta dy}{dy} = -\mu \varepsilon_x = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\Delta dz}{dz} = -\mu \varepsilon_x = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$$

Trojosová (priestorová) napätosť:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu (\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y))$$

$$\gamma_x = \frac{\tau_x}{G}$$

$$\gamma_y = \frac{\tau_y}{G}$$

$$\gamma_z = \frac{\tau_z}{G}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3))$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu (\sigma_1 + \sigma_3))$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} (\sigma_3 - \mu (\sigma_1 + \sigma_2))$$

Dvojosová (rovinná) napätosť: (napr.: $\sigma_z = 0$)

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_z = \frac{\tau_z}{G}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu \sigma_2)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu \sigma_1)$$

analogicky:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_x - \mu \varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_y - \mu \varepsilon_x)$$

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_1 - \mu \varepsilon_2)$$

$$\sigma_2 = \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_2 - \mu \varepsilon_1)$$

ENERGIA NAPÄTOSTI PRE TROJOSOVÚ NAPÄTOSŤ

$$A = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_x \gamma_x + \tau_y \gamma_y + \tau_z \gamma_z) =$$

$$= \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_x \sigma_z)) +$$

energia napätosti normálových napätí

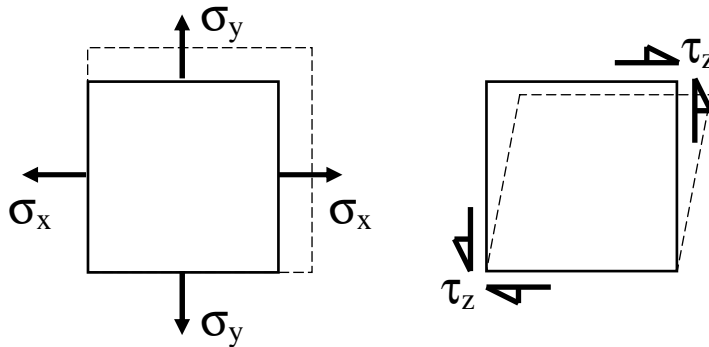
$$+ \frac{1}{2G} (\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2) =$$

energia napätosti šmykových napätí

$$= \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_1 \sigma_3))$$

$$A = \underbrace{\frac{1-2\mu}{6E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}_{\text{energia napätosti spôsobujúca zmenu objemu}} + \underbrace{\frac{1+\mu}{3E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_1 \sigma_3)}_{\text{energia napätosti spôsobujúca zmenu tvaru}}$$

ENERGIA NAPÄTOSTI PRE DVOJOSOVÚ NAPÄTOSŤ



$$dA = \frac{1}{2} \sigma_x \varepsilon_x dV + \frac{1}{2} \sigma_y \varepsilon_y dV + \frac{1}{2} \tau_z \gamma_z dV$$

$$A = \frac{dA}{dV} = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_z \gamma_z) =$$

$$= \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu \sigma_x \sigma_y) + \frac{1}{2G} \tau_z^2 =$$

$$= \frac{1}{2E} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\mu \sigma_1 \sigma_2)$$

HYPOTÉZY PEVNOSTI

SAINT-VENANTOVA - hypotéza maximálneho pomerného predĺženia

$$\sigma_S = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq \sigma_{DOV}$$

TRESCOVA - hypotéza maximálneho šmykového napätia

$$\sigma_S = \sigma_1 - \sigma_3 \leq \sigma_{DOV}$$

MISESOVA – HMMH - hypotéza energie napätosti potrebnej na zmenu tvaru

$$\sigma_S = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3} \leq \sigma_{DOV}$$

NORMÁLOVÉ NAPÄTIE V OHÝBANOM NOSNÍKU

