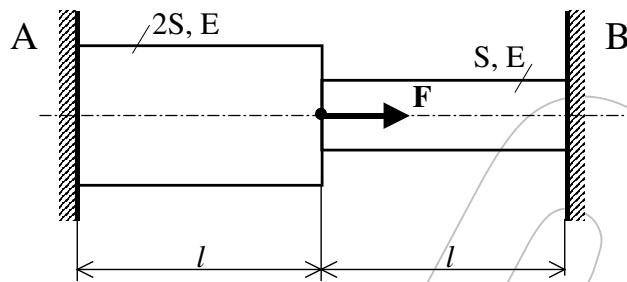


## PRŮT NAMÁHANÝ NA ŤAH ALEBO TLAK

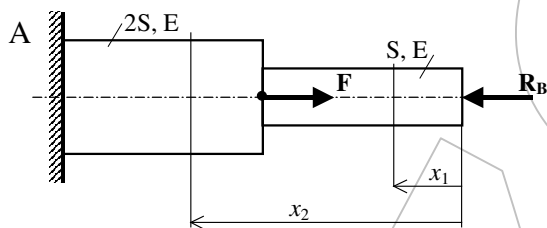


Posúdenie statickej určítosti prúta:

$$n = 3^{\circ} - 3^{\circ}_A - 3^{\circ}_B = -3^{\circ}$$

- vzhľadom na charakter zaťaženia je však úloha iba 1x staticky neurčitá

Je potrebné vytvoriť staticky určitý systém na jej riešenie:



deformačná podmienka:  $\Delta l = 0$

$$x_1 \in \langle 0 ; l \rangle$$

$$x_2 \in \langle l ; 2l \rangle$$

$$N_{(x_1)} + R_B = 0$$

$$N_{(x_2)} + R_B - F = 0$$

$$N_{(x_1)} = -R_B$$

$$N_{(x_2)} = -R_B + F$$

Výpočet staticky neurčitej reakcie:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = 0$$

$$\int_{(x_1)} \frac{N_{(x_1)}}{ES_1} dx_1 + \int_{(x_2)} \frac{N_{(x_2)}}{ES_2} dx_2 = 0$$

$$\frac{N_{(x_1)} l_1}{ES_1} + \frac{N_{(x_2)} l_2}{ES_2} = 0$$

$$\frac{-R_B l}{ES} + \frac{(-R_B + F)l}{E2S} = 0$$

$$R_B = \frac{1}{3} F$$

potom:

osová sila v jednotlivých častiach prúta

$$N_{(x1)} = -\frac{1}{3}F$$

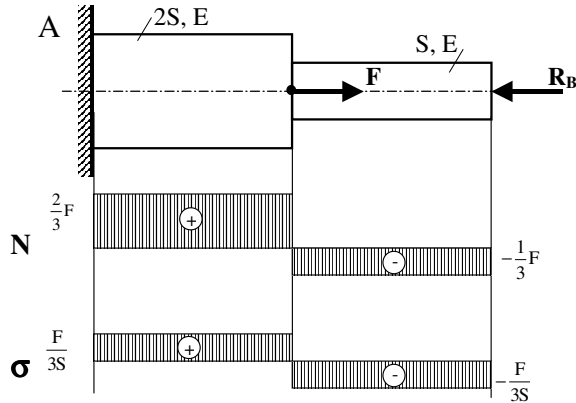
$$N_{(x2)} = \frac{2}{3}F$$

normálové napätie v jednotlivých častiach prúta

$$\sigma_{(x1)} = \frac{N_{(x1)}}{S_1} = -\frac{F}{3S}$$

$$\sigma_{(x2)} = \frac{N_{(x2)}}{S_2} = \frac{2F}{3 \cdot 2S} = \frac{F}{3S}$$

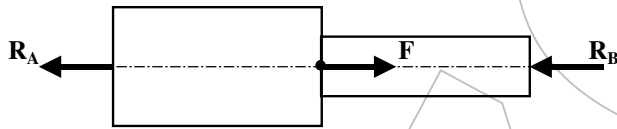
Priebeh osových síl a normálových napätí po dĺžke prúta:



Posunutie pôsobiska sily F:

$$u_F = |\Delta l_1| = \left| \frac{N_{(x1)} l_1}{ES_1} \right| = \left| -\frac{Fl}{3ES} \right|$$

Reakcie vo väzbách:



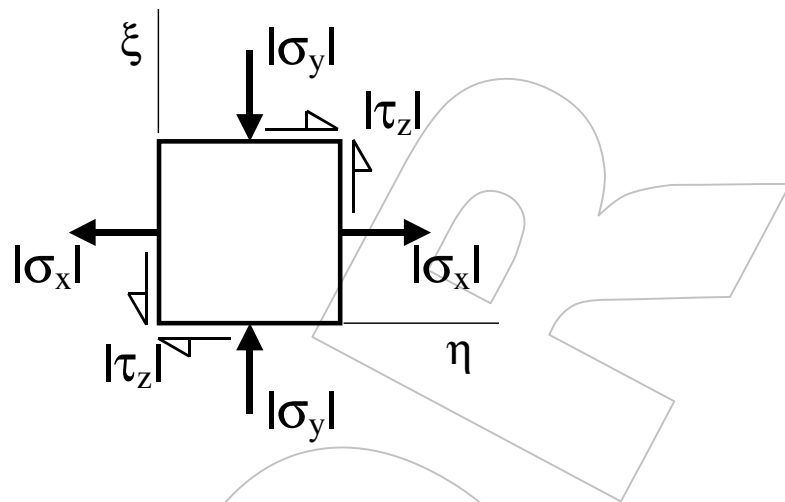
$$\sum F_{ix} = 0: \quad -R_A + F - R_B = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = \frac{2}{3}F$$

Dimenzovanie prúta:

z priebehu normálových napätí po dĺžke prúta vyplýva veľkosť  $\sigma_{\max}$ :

$$\sigma_{\max} = \left| \frac{F}{3S} \right| \leq \sigma_{\text{DOV}} \quad \text{príp.} \quad S \geq \frac{F}{3\sigma_{\text{DOV}}}$$

## MOHROVA KRUŽNICA ROVINNEJ NAPÄTOSTI



$$|\sigma_x| = 60 \text{ MPa}$$

$$|\sigma_y| = 20 \text{ MPa}$$

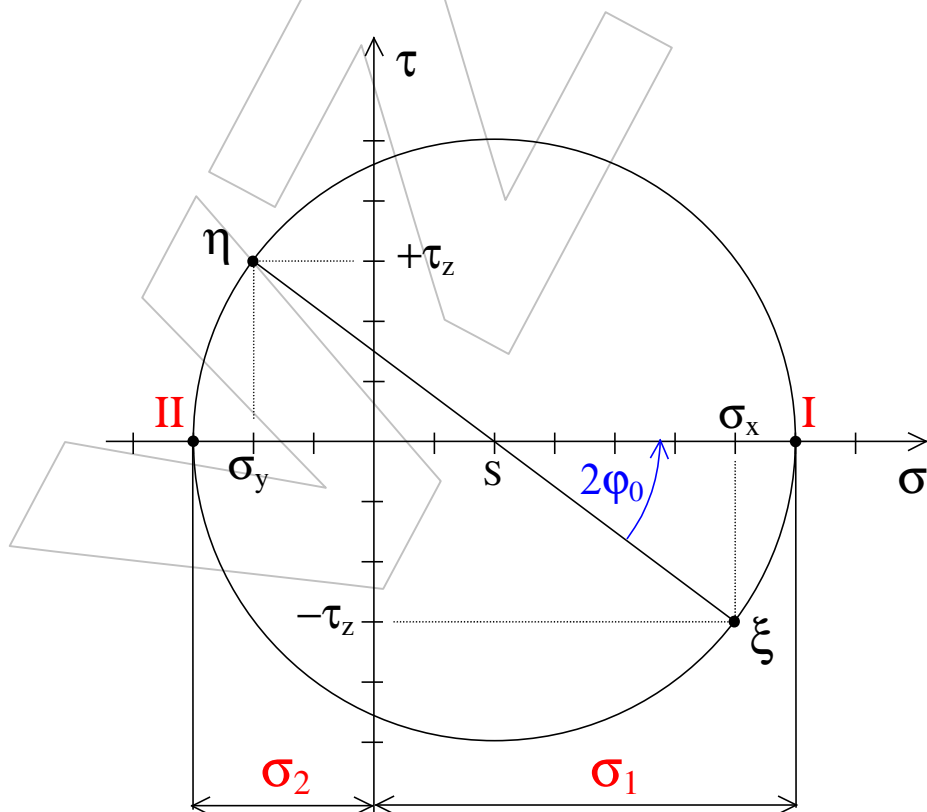
$$|\tau_z| = 30 \text{ MPa}$$

*Mohrova kružnica rovinnej napätosti – grafické riešenie*

Body zodpovedajúce rezovým rovinám:

$$\xi : (+60 ; -30)$$

$$\eta : (-20 ; +30)$$



$$\sigma_1 \cong +70 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 \cong -30 \text{ MPa}$$

$$2\varphi_0 \cong 36,87^\circ$$

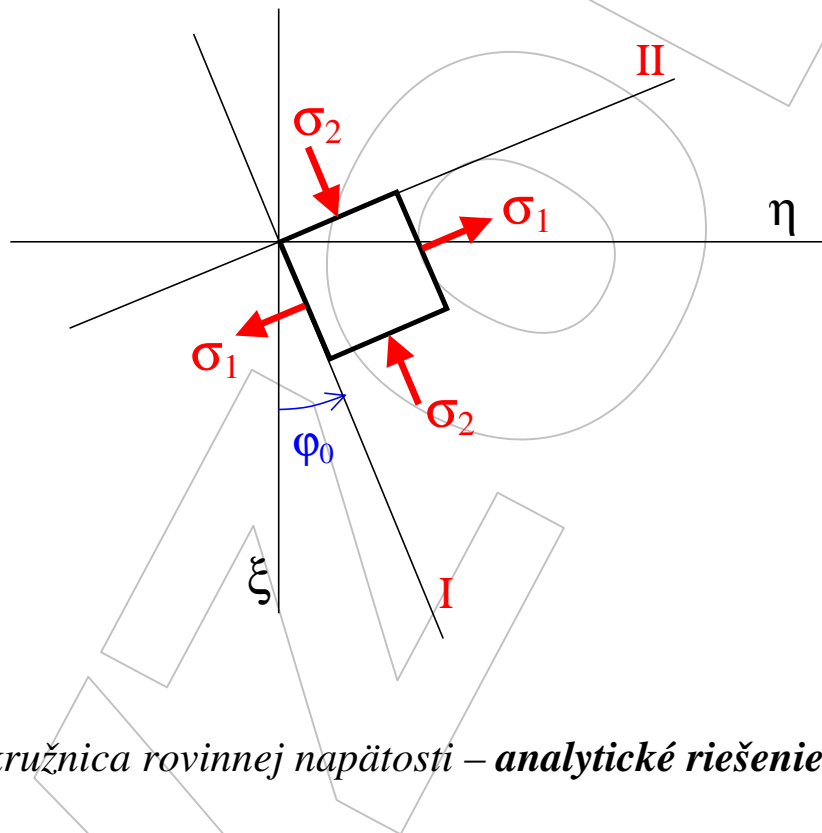
$$\varphi_0 \cong 18,435^\circ$$

Body zodpovedajúce hlavným rezovým rovinám:

$$\text{I: } (\sigma_1; 0) = (+70; 0)$$

$$\text{II: } (\sigma_2; 0) = (-30; 0)$$

*Smery hlavných normálových napätí:*



*Mohrova kružnica rovinnej napätosti – analytické riešenie*

$$\sigma_x = +60 \text{ MPa}$$

$$\sigma_y = -20 \text{ MPa}$$

$$\tau_z = +30 \text{ MPa}$$

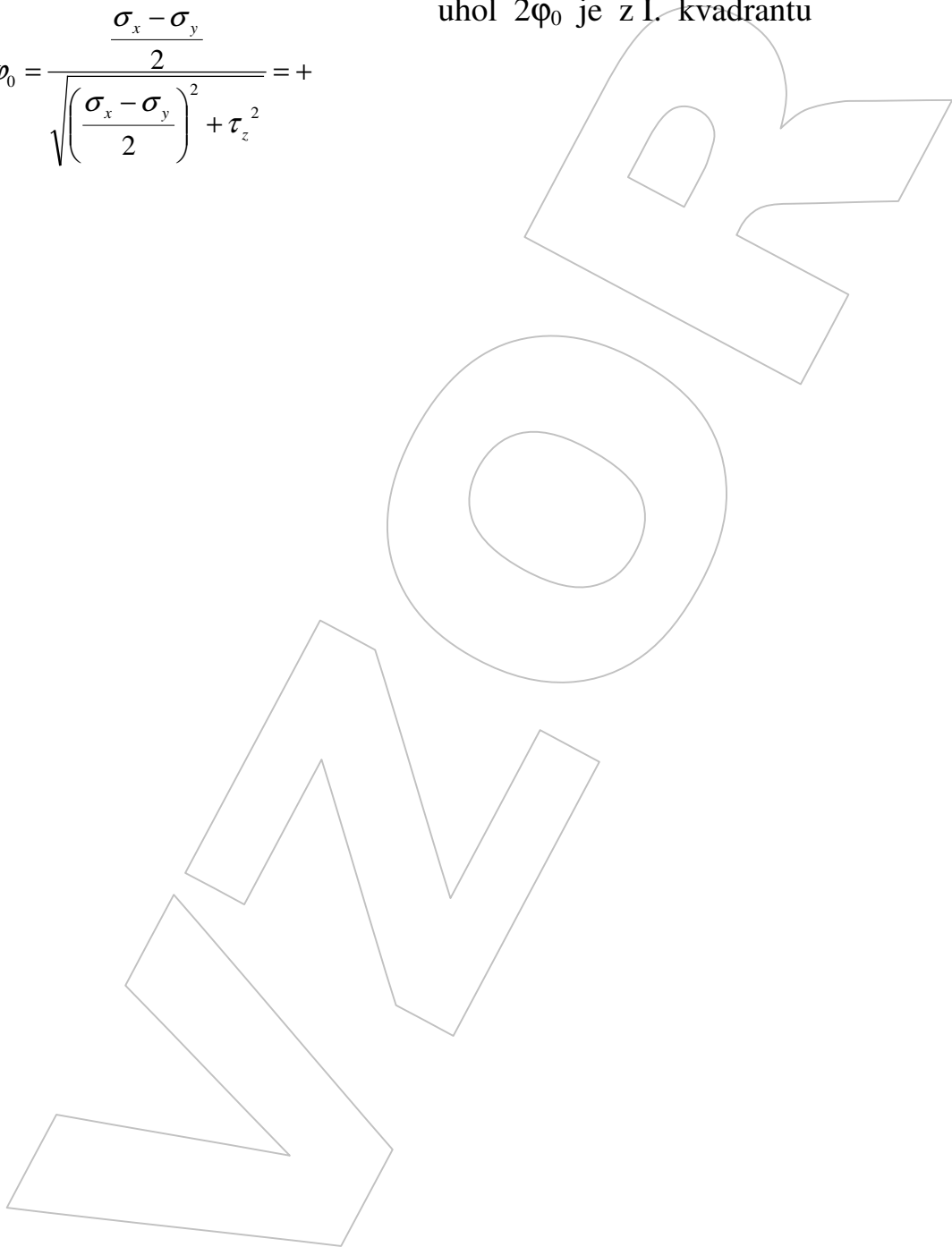
dosadíme do:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2} = \begin{cases} \sigma_1 = \\ \sigma_2 = \end{cases}$$

$$\sin 2\varphi_0 = \frac{\tau_z}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2}} = +$$

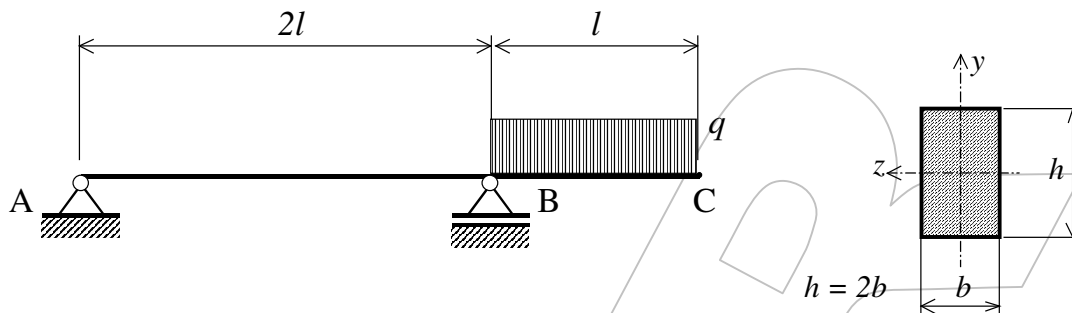
$$\cos 2\varphi_0 = \frac{\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_z^2}} = +$$

uhol  $2\varphi_0$  je z I. kvadrantu



## ROVINNÝ OHYB NOSNÍKA

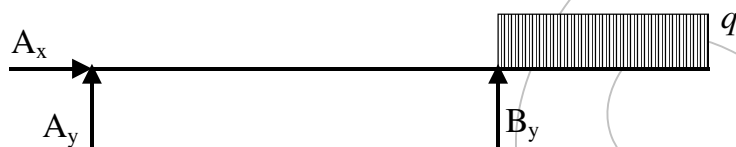
staticky určitý nosník



Posúdenie statickej určítosti nosníka:

$$n = 3^{\circ} - 2^{\circ}_A - 1^{\circ}_B = 0 \quad - \text{úloha je staticky určitá}$$

Nosník uvolníme:

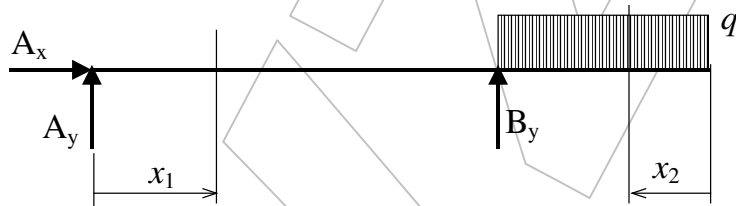


$$\sum F_{iX} = 0: \quad A_x = 0$$

$$\sum M_{iA} = 0: \quad B_y \cdot 2l - ql \cdot \frac{5l}{2} = 0 \quad B_y = \frac{5}{4}ql$$

$$\sum F_{iy} = 0: \quad A_y + B_y - ql = 0 \quad A_y = -\frac{1}{4}ql$$

Miesta a počet myslenných rezov:



$$x_1 \in \langle 0; 2l \rangle \quad M_{(x1)} = +A_y x_1 = -\frac{1}{4}ql x_1$$

$$x_2 \in \langle 0; l \rangle \quad M_{(x2)} = -qx_2 \cdot \frac{x_2}{2} = -\frac{1}{2}q x_2^2$$

$$T_{(x1)} = +\frac{dM_{(x1)}}{dx_1} = -\frac{1}{4}ql$$

$$T_{(x2)} = -\frac{dM_{(x2)}}{dx_2} = +q x_2$$

$$T_{(x_1)} = -\frac{1}{4}ql$$

$$T_{(x_2=0)} = 0$$

$$T_{(x_2=2l)} = +ql$$

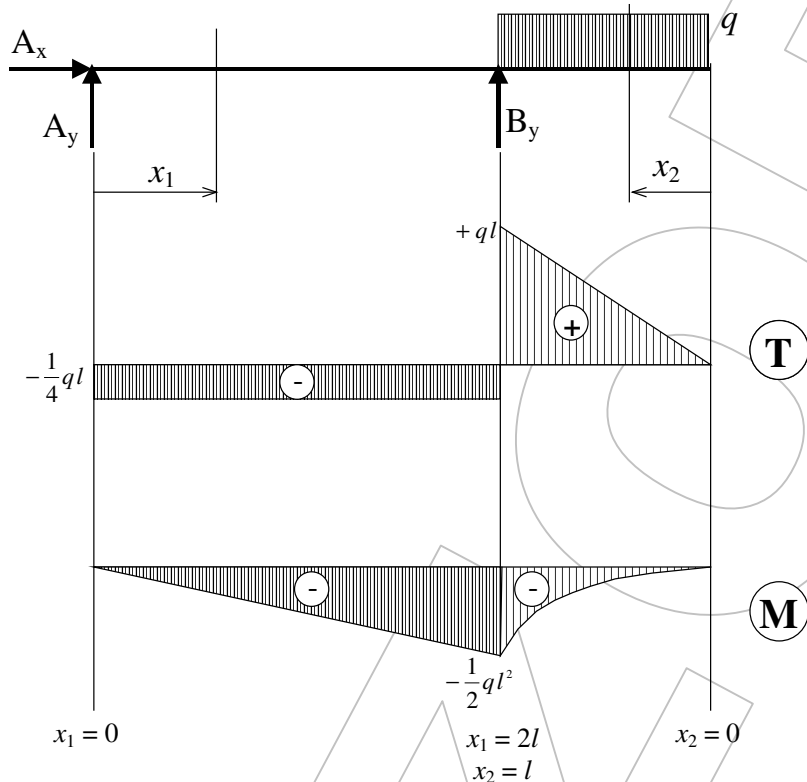
$$M_{(x_1=0)} = 0$$

$$M_{(x_1=2l)} = -\frac{1}{2}ql^2$$

$$M_{(x_2=0)} = 0$$

$$M_{(x_2=l)} = -\frac{1}{2}ql^2$$

Priebeh priečných (šmykových) síl a ohybových momentov po dĺžke nosníka:



maximálny ohybový moment pôsobiaci na nosníku:

$$M_{o \max} = \left| -\frac{1}{2}ql^2 \right| = \frac{1}{2}ql^2$$

Dimenzovanie prierezu:

$$\sigma_{o \max} = \frac{M_{o \max}}{W_{oz}} \leq \sigma_{DOV}$$

modul prierezu v ohybe pre obdĺžnikový prierez:  $W_{oz} = \frac{1}{6}bh^2 = \text{pre } h = 2b \Big| = \frac{2}{3}b^3$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3M_{o \max}}{2\sigma_{DOV}}}$$

$$h = 2b$$

Približná diferenciálna rovnica priehybovej čiary:

$$v_{(x1)}'' = -\frac{M_{(x1)}}{E J_Z} = \frac{q l}{4EJ} x_1$$

$$v_{(x1)}' = \varphi_{(x1)} = \frac{q l}{8EJ} x_1^2 + c_1$$

$$v_{(x1)} = \frac{q l}{24EJ} x_1^3 + c_1 x_1 + c_3$$

$$v_{(x2)}'' = -\frac{M_{(x2)}}{E J_Z} = \frac{q}{2EJ} x_2^2$$

$$v_{(x2)}' = \varphi_{(x2)} = \frac{q}{6EJ} x_2^3 + c_2$$

$$v_{(x2)} = \frac{q}{24EJ} x_2^4 + c_2 x_2 + c_4$$

Okrajové podmienky:

- slúžia na výpočet integračných konštánt  $c_1$  až  $c_4$

**A:**  $v_{(x1=0)} = 0$

**B:**  $v_{(x1=2l)} = 0$

**B:**  $v_{(x2=l)} = 0$

**B:**  $v'_{(x1=2l)} = -v'_{(x2=l)}$

Z prvej podmienky:  $c_3 = 0$

Z druhej podmienky:  $c_1 = -\frac{q l^3}{6EJ}$

Zo štvrtej podmienky:  $c_2 = \frac{q l^3}{2EJ}$

Z tretej podmienky:  $c_4 = -\frac{q l^4}{EJ}$

Rovnice uhla natočenia prierezu a priehybu vo všeobecnom mieste nosníka:

$$\varphi_{(x1)} = \frac{q l}{8EJ} x_1^2 - \frac{q l^3}{6EJ} \quad \varphi_{(x2)} = \frac{q}{6EJ} x_2^3 + \frac{q l^3}{2EJ}$$

$$v_{(x1)} = \frac{q l}{24EJ} x_1^3 - \frac{q l^3}{6EJ} x_1 \quad v_{(x2)} = \frac{q}{24EJ} x_2^4 + \frac{q l^3}{2EJ} x_2 - \frac{q l^4}{EJ}$$

Priehyb a uhol natočenia prierezu na voľnom konci nosníka (v bode C):

**C:**  $v_C = v_{(x2=0)} = c_4 = -\frac{q l^4}{EJ}$  [m, mm]

**C:**  $\varphi_C = v'_{(x2=0)} = \varphi_{(x2=0)} = c_2 = \frac{q l^3}{2EJ}$  [rad]